有限生成交换群的直和分解

有限生成交换群基本定理： 有限生成交换群 H 可以分解为

$$H \cong \mathbf{Z}^m \oplus \mathbf{Z}_{k_1} \oplus \ . \ . \ . \ \oplus \mathbf{Z}_{k_n}.$$

其中 $\mathbf{Z}^m$ 是个有限生成自由交换群，其秩 m 称为 H 的秩，记为 rank H，而 $1 < k_1 \mid \ . \ . \ . \mid k_n$，这些 k_i 称为 H 的挠系数。它们都由 H 所决定。

关于这个定理的讨论并不应当是本课程中要做的功课，但是我们需要掌握一两种实用的算法去计算有限表出群的交换化的秩和挠系数。下面设 $< a_1, \ . \ . \ . \ . \ , a_m \mid r_1, \ . \ . \ . \ . \ , r_n >$ 是群 G 的一个有限表出。记 $a_1, \ . \ . \ . \ . \ , a_m$ 生成的自由群为 F_m，记它们生成的自由交换群为 $\mathbf{Z}^m$ (其中群的运算用加法表示)，并考虑同态 $f: F_m \to \mathbf{Z}^m$，满足 $f(a_k) = a_k$。则 f 将 F_m 中含约化字 $r_1, \ . \ . \ . \ . \ , r_n$ 的最小正规子群送到 $\mathbf{Z}^m$ 中含 $f(r_1), \ . \ . \ . \ . \ , f(r_n)$ 的最小交换子群 H，而 $\mathbf{Z}^m/H$ 就是 G 的交换化。设 $f(r_k) = F_{k1}a_1 + \ . \ . \ . \ + F_{km}a_m$，于是群 G 的每个有限表出对应于一个整系数矩阵 $F = (F_{ij})$。

秩和挠系数的计算

定义： 设 F 是一个整系数矩阵，F 上的整系数初等行 [列] 变换是指如下几类变换：
(1) 将 F 的某一行 [列] 乘以 -1；
(2) 将 F 的某一行 [列] 乘以某个整数倍后加到另一行 [列]；
(3) 交换 F 的某两行 [列] 的位置。

命题： 设 H(F) 是 $\mathbf{Z}^m$ 中含 $F_{11}a_1 + \ . \ . \ . \ + F_{1m}a_m, \ . \ . \ . \ . \ , F_{n1}a_1 + \ . \ . \ . \ + F_{nm}a_m$ 的最小交换子群，则在系数矩阵 $F = (F_{ij})$ 的整系数初等变换下，相应的 H 及商群 $\mathbf{Z}^m/H$ 的同构型不会改变（事实上整系数初等行变换根本不改变 H）。

于是可以用整系数初等变换将 F 化成标准型，然后计算标准型对应的商群 $\mathbf{Z}^m/H$，从而得到 G 的交换化的秩和挠系数。我们要求标准型的 $F = (F_{ij})$ 满足
(1) 当 $i \neq j$ 时 $F_{ij} = 0$；
(2) 每个 F_{ii} 是非负整数且 $F_{ii} \mid F_{i+1,\, i+1}$。
对于标准型的 F，$H = \{(F_{11}x_1, \ . \ . \ . \ . \ , F_{mm}x_m) \in \mathbf{Z}^m \mid \text{每个 } x_i \in \mathbf{Z}\}$（F 如果行数比列数少则其中没有的 F_{ii} 取零）。因此 G 的交换化的挠系数就是 F_{ii} 中大于 1 的那些数字，而其秩为 F 的列数减去非零行数。

化标准型的算法如下。第一步先我们把 F 化简成 $\mathrm{diag}(F_{11}, F')$ 的形式，这里 F_{11} 为非负整数并且整除 F' 的所有系数。先挑出绝对值最小的非零系数换到左上角，不妨设就是 $F_{11} > 0$，若此时的矩阵不符合要求，有两种情况：
情形 1：F_{11} 不整除第一行或第一列中的某项，不妨设为就是 F_{21}，此时可以用第一行去消第二行而产生绝对值更小的非零系数，再将这个系数换到左上角；
情形 2: F_{11} 整除第一行第一列的其它项，但并不整除剩下的所有项，不妨设 $F = \mathrm{diag}(F_{11}, F')$ 但 F_{11} 不整除 F_{22}，此时将第一列加到第二列，再用所得第一行去消第二行可以产生绝对值更小的非零系数，再将这个系数换到左上角。
由于每一步调整都使得 F_{11} 的最小绝对值变得更小，因此有限步后即可达到要求。

完成第一步后再对 F' 同样处理，从而把 F 化简成 $\mathrm{diag}(F_{11}, F_{22}, F'')$ 的形式，然后再归纳地做下去，最后就会化简成希望的标准形式。

例： 考虑正五边形的对称群 G，设 a 为 1/5 圈的旋转，b 为关于某个对称轴的反射，则 G 有表出 $< a, b \mid a^5, b^2, (ab)^2 >$，$f: F_2 \to \mathbf{Z}^2$ 将 a^5 送到 $5a + 0b$，将 b^2 送到 $0a + 2b$，将 $(ab)^2$ 送到 $2a + 2b$，因此相应系数矩阵为

$$F = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 10 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

（这不是最简洁的简化方法，却是最机械的简化方法。）所以 G 的交换化的秩为列数减去非零行数 = 0，而挠系数为对角线上大于 1 的那个数字 2，换言之 G 的交换化同构于 $\mathbf{Z}_2$。