MA323 期中考试

姓名：______________

本考试为110分钟闭卷。请用完整的语句、正确的语法和书写规范进行论证，例如区分 R 与 $\mathbb{R}$。

问题 1 (30分). 写出答案，无需证明。

（1） 判断正误：将环面上一个经圈和一个纬圈捏成一点，得到（同胚于）球面。✓

（2） 判断正误：将 Möbius 带沿边界粘到圆盘上，得到 Klein 瓶。✗

（射影平面）

（3） 环面与射影平面的连通和 $T^2\#P^2$ 可否定向？其 Euler 数是多少？

否　　$1-3+1=-1$

（4） 设 $\{(X_\alpha,\tau_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ 是一族拓扑空间。给出集合 $\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$ 上使得每个投射 $p_\alpha\colon \prod X_\alpha\to X_\alpha$ 连续的**最弱**拓扑。

该拓扑由形如 $\prod\limits_{\alpha\in A} U_\alpha$ 的集合生成，其中每个 U_α 是 X_α 中的开集，且除有限个之外与 X_α 相同.

（5） 设 (X,τ) 是一个拓扑空间，$\sim$ 是 X 上一个等价关系。给出等价类集合 $X/\sim$ 上使得投射 $p\colon X\to X/\sim$ 连续的**最强**拓扑。

定义 V 在 $X/\sim$ 中开当且仅当 $p^{-1}(V)$ 在 X 中开.

问题 2 (15分). 判断正误，对真命题给出证明，对假命题举出反例。

（1） 设 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是 X 的一个开覆盖，A 是 X 的一个子集。若每个 $A\cap U_i$ 在子空间 U_i 中闭，则 A 在 X 中闭。

真. $A^c = A^c \cap \bigcup_{i\in I} U_i$

$= \bigcup_{i\in I} (U_i \setminus A)$

由 $A\cap U_i$ 在 U_i 中闭，知 $U_i\setminus A$ 在 U_i 中开.

又由 U_i 在 X 中开，知 $U_i\setminus A$ 在 X 中开.

故 A^c 在 X 中开，A 闭.

（2） 若 X 中任意收敛序列极限惟一，则 X 是 Hausdorff 空间。

假. $\mathbb{R}$ 赋予余可数拓扑

此时任意两个开集 U, V 相交，故非 Hausdorff（否则 $U\cap V=\varnothing$，于是 $U^c\cup V^c=\mathbb{R}$，而 U^c, V^c 可数，矛盾）.

设 $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. 则 $W:=\{x_n \mid x_n\neq x\}$ 可数，于是 W^c 是 x 的开邻域，包含 $\{x_n\}$ 中除有限项外的其他点，即 $\{x_n\}$ 除有限项外其他点都与其极限相等，故极限惟一.

（3） Hilbert 空间中的单位闭球紧致。

假. 考虑点列 $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$，其中每个 e_n 的第 n 个坐标为 1，其余坐标为 0.

该点列无收敛子列，故 Hilbert 空间非列紧. 对于度量空间列紧与紧致等价，从而 Hilbert 空间非紧致.

问题 3 (20分). 设 X 满足 C_1 公理。

（1） 叙述邻域基的定义。

设 $x \in X$，$\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 x 的一族邻域.
若任给 x 的邻域 N，存在 $\alpha_0 \in A$ 使得 $N_{\alpha_0} \subset N$，
则称 $\{N_\alpha\}_{\alpha \in A}$ 是 x 的一个邻域基.

（2） 叙述 C_1 公理。

任意 $x \in X$ 有一个可数邻域基.

（3） 任给 $x \in X$，求证：存在 x 的邻域基 $\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$，使得对每个 i 有 $N_i \supset N_{i+1}$。

证明：设 $\{W_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 x 的一族邻域

定义 $N_i = \bigcap_{k=1}^{i} W_k$. □

（4） 假设 X 中任意收敛序列有惟一极限。求证：X 是 Hausdorff 空间。

证明：假设存在 $x, y \in X$ 使得任取 x 的邻域 U，
任取 y 的邻域 V，有 $U \cap V \neq \phi$.

设 $\{M_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 x 的一族邻域基，$M_i \supset M_{i+1}$.

$\{N_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 y 的一族邻域基，$N_i \supset N_{i+1}$.

设 $x_i \in M_i \cap N_i$.

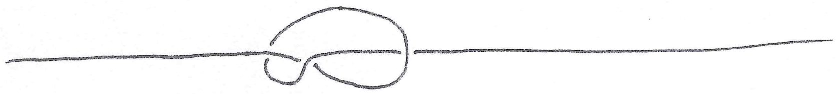
则 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ 同时收敛于 x, y. 矛盾 □

问题 4 (10分).

（1） 叙述 Tietze 扩张定理。

若 X 满足 T_4 公理，则任意定义在 X 中闭集 D 上的连续函数 $f: D \to \mathbb{E}^1$ 可以连续地扩张到整个 X 上，即存在连续函数 $\tilde{f}: X \to \mathbb{E}^1$ 使得 $\tilde{f}|_D = f$.

（2） 回忆拓扑空间 X 的一个收缩核是指这样的 $A \subset X$；~~使得~~存在连续映射 $r: X \to A$，~~满足~~使得包含映射 $i: A \to X$ 与 r 的复合是 A 上的恒同映射。证明图中“打了结的 x 轴” K 是 $\mathbb{E}^3$ 的一个收缩核。



K

证明：易见存在 K 到 $\mathbb{E}^1$ 的同胚映射 f.

由 Tietze 扩张定理，存在连续映射 $\tilde{f}: X \to \mathbb{E}^1$ 使得 $\tilde{f}|_K = f$.

令 $r = f^{-1} \circ \tilde{f}$ 即可. $\square$

问题 5 (10分). 考虑$\mathbb{E}^2$的子集$X = A \cup B$，其中$A = \{0\} \times [-1,1]$，$B = \{(x, \sin(1/x)) \mid x > 0\}$。

（1） 求证：A的每点存在X中一个不连通的开邻域。

证明：设 $(0,y) \in A$. 则开长方形 $\mathbb{R} \times (y-\frac{1}{7}, y+\frac{1}{7})$

与X的交集是 $(0,y)$ 在X中的开邻域.

易见 $(\frac{1}{\arcsin y}, y)$ 与 $(\frac{1}{\arcsin y + 2\pi}, y)$

在该邻域的两个不同的连通分支中. □

（2） 求证：X非道路连通。

证明：假设存在连续映射 $f: [0,1] \longrightarrow X$

使得 $a := f(0) \in A$, $b := f(1) \in B$.

记 $t_0 := \sup\{t \in [0,1] \mid f(t) \in A\}$. $c := f(t_0)$.

由A在X中闭且f连续，知 $c \in A$.

设N是(1)中构造的c的不连通开邻域.

由f连续，知存在 $\delta > 0$，使得

$(t_0-\delta, t_0+\delta)$ 在f下的像 $G \subset N$.

由G连通，知 $G \subset A$（N在x轴投影的连通分支是$\{0\}$）.

于是 $f(t_0+\delta/2) \in A$. 矛盾. □

问题 6 (15分). 设 $f\colon X \to Y$，其中 Y 紧致 Hausdorff。

（1） 求证：f 连续当且仅当它的图像 $G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$ 在 $X \times Y$ 中闭。

证明："$\Rightarrow$"：设 $(x,y) \in X\times Y \setminus G_f$，则 $y \neq f(x)$

由 Y Hausdorff 知存在 Y 中开集 U, V

使得 $y \in U$, $f(x) \in V$，$U \cap V = \phi$.

由 f 连续，$W := f^{-1}(V)$ 是 x 的开邻域

于是 $W \times U$ 是 (x,y) 的开邻域

且 $W \times U \cap G_f = \phi$. 故 G_f 闭.

"$\Leftarrow$"：由 Y 紧，投射 $p: X \times Y \longrightarrow X$ 闭.(*)

于是任给闭集 $K \subset Y$，$f^{-1}(K) =$

$p(X \times K \cap G_f)$ 闭. 故 f 连续. □

(*)证明：设 F 是 $X\times Y$ 中的闭集，$x_0 \notin p(F)$.
则对任意 $y \in Y$，存在开集 $U_y \ni x_0$, $V_y \ni y$ 使得
$U_y \times V_y \subset F^c$. 由 $\{x_0\} \times Y$ 紧，存在 $\{U_{y_i} \times V_{y_i}\}_{i=1}^n$ 使得
$\bigcup_{i=1}^n U_{y_i} \times V_{y_i} \supset \{x_0\} \times Y$. 记 $U := \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}$. 则 $x_0 \in U \subset p(F)^c$. □

（2） 举例说明当 Y 非紧致时，上述命题未必成立。

$$f: E^1 \longrightarrow E^1$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x}$$