## 单纯复形 (simplicial complex)

<u>定义</u> 若 $E^N$ 中的点 $A_0, \cdots, A_n$ 满足

$$x_0 + \cdots + x_n = 0 \text{ 且 } x_0 A_0 + \cdots + x_n A_n = 0 \Longleftrightarrow x_0 = \cdots = x_n = 0$$

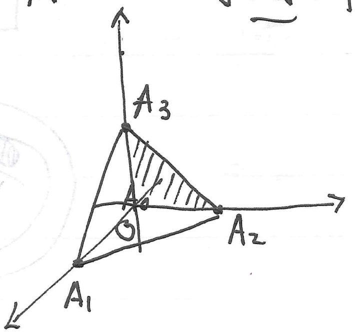
则称 $A_0, \cdots, A_n$ 处于一般位置. (generic position)

<u>注</u> 这等价于要求 n 元向量组 $A_1 - A_0, \cdots, A_n - A_0$ 线性无关.

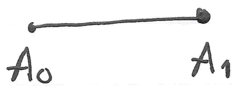
<u>定义</u> 当 $A_0, \cdots, A_n$ 处于一般位置时，它们张成的闭凸集

$$\{x_0 A_0 + \cdots + x_n A_n \mid x_0 + \cdots + x_n = 1,\ x_0, \cdots, x_n \in [0,1]\}$$

称为一个n维单(纯)形 (n-simplex)，$A_0, \cdots, A_n$ 称为该单形的顶点 (vertex). ~~把公式中的[0,1]换成(0,1)，所得集合称为n维开单形~~. 如果单形 t 的顶点都是单形 s 的顶点，则称 t 为 s 的一个面. face









<u>注</u> 顶点处于一般位置的条件保证了单形内每个点都有唯一确定的坐标 $(x_0, \cdots, x_n)$.

<u>定义</u> 若 $E^N$ 中单形的集合 K 满足
(1) $s \in K \Rightarrow s$ 的面 $\in K$
(2) $s, t \in K,\ s \cap t \neq \phi \Rightarrow s \cap t \in K$.

则称 K 为一个(单纯)复形 (simplicial complex)，其中单形的最高维数称为 K 的维数. dimension $|K| := \bigcup \{s \mid s \in K\}$ 称为 K 的多面体. polygon

(1895–1965 匈牙利)
<u>Radó 引理</u> 每个闭曲面都同胚于某个2维有限单纯复形的多面体.
1920s
3维流形：Moise, Bing 1950s (Munkres! Smale, J.H.C. Whitehead 允许唯一的光滑结
4维流形：$E_8$ [redacted] 流形不可三角剖分 ← Freedman 1982 (不容许光滑结构. 另有些容许不)

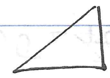
≥5维流形：存在不可三角剖分 Manolescu 2016　　（等于不等价的光滑结构）.

## Euler数（凸多面体的顶点数 − 边数 + 面数 = 2）

~~定义~~ 称 $\chi(K) :=$ 偶数维单形数 − 奇数维单形数
characteristic

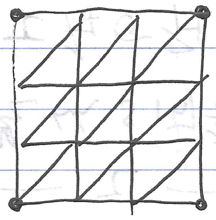
**命题** 当 $|K| \cong gT^2$ 时 $\chi(K) = 2-2g$.
当 $|K| \cong kP^2$ 时 $\chi(K) = 2-k$

**注** ① $\chi(K)$ 是个拓扑不变量，称为 $|K|$ 的 Euler数.（Euler characteristic）
② 事实上，当 $|K|$ 同胚于紧致连通带边曲面时，$\chi(K)$ 也由 $|K|$ 的同胚类决定. 例如当 $|K|$ 同胚于圆盘时 $\chi(K) = 1$.

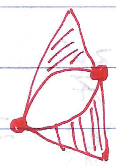


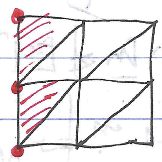
③ 证明用到同调论.（维单形数 = 维同调群的秩）$H_m(K)$.

**例** 环面的单纯复形实现



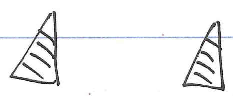
$9-27+18=0$





$4-12+8=0$　　不满足单纯复形(Z)条件

**例** $\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2$.



~~[illegible]~~　　$-3+3-2$

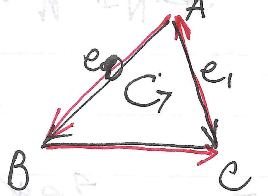
## 定向

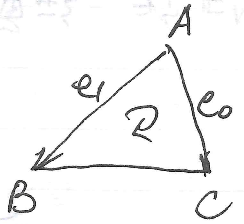
**定义** 设 $s$ 是 $E^N$ 中的 $n$ 维单形，称 $E^N$ 中平行于 $s$ 的线性无关 $n$ 元向量组为 $s$ 的一个标架 (frame).

在标架间定义一个等价关系，使得两个标架等价当且仅当它们之间的转换矩阵（$n\times n$）的行列式为正数. 称 $s$ 的标架的等价类为 $s$ 的一个定向.（orientation）

注 设s的顶点为$A_0,\cdots,A_n$. 则顶点的每种排序决定了一个定向 $[A_{k_0}\cdots A_{k_n}]$，即标架$(A_{k_1}-A_{k_0},\cdots,A_{k_n}-A_{k_0})$所在的等价类. 易验证对顶点排序做奇置换改变该定向，而做偶置换不改变该定向.

~~定义~~ 例





$(e_0,e_1)=[ABC] \sim [BCA] \sim [CAB]$

$[ACB]=(e_1,e_0) \sim [CBA] \sim [BAC]$

定义 设s是$E^N$中的n维单形，t是s的$(n-1)$维面.

若s的定向σ可由标架$(e_0,e_1,\cdots,e_{n-1})$代表，

$t$ —— $\tau$ —— $(e_1,\cdots,e_{n-1})$ ——

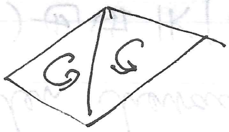
且$e_0$是从s内部指向t内部的向量，

则称τ为σ在t上诱导的定向 (induced orientation)

若两个n维单形$s_1,s_2$上各有一个定向$\sigma_1,\sigma_2$，

且它们交于一个公共的$(n-1)$维面t，而$\sigma_1,\sigma_2$在t上诱导的定向相反，

则称$\sigma_1$与$\sigma_2$定向相容. compatible.



命题 若$|K|\cong T^2$，则可以在K的每个2维单形上取一个定向，使得任何两个有公共边的三角形上的定向均相容.
(这样的取法称为K上的一个(全局) 定向，并称K可定向.)
global orientable

若$|K|\cong RP^2$，则不论如何在K的每个2维单形上选取定向，一定有两个有公共边的三角形上具有不相容的定向.
(这时我们称K不可定向)
unorientable

## 闭曲面类型的识别

**推论** 设2维复形 $K_1, K_2$ 的多面体是两个闭曲面.
则 $|K_1| \cong |K_2|$ 当且仅当它们的 Euler 数和可定向性相同.

$$H_n(M) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{可定向} \\ 0 & \text{不可定向} \end{cases}$$

注① 奇数维流形的 Euler 示性数 $=0$.

② 4维单连通闭流形 $M \cong N$

$\Longleftrightarrow$ $Q_M \cong Q_N$ intersection form. $H^2(M;\mathbb{Z}) \times H^2(M;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$.

$ks(M) = ks(N)$. Kirby-Siebenmann invariant $ks(M) \in H^4(M;\mathbb{Z}/2) = \mathbb{Z}/2$.

$Q$ not even: $(Q, \mathbb{Z}/2)$. can be realized

$Q$ ~~not~~ even: $(Q, \frac{\mathrm{sign}(Q)}{8} \bmod 2)$ can be realized.

单纯复形.

CW 复形 (胞腔空间).